



UNIVERSITAT^{DE}
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Estudi i simulació del problema
restringit estès de tres cossos

Autor: Blai Barberà Bertrams

Director: Dr. Antoni Benseny Ardiaca
Realitzat a: Departament de
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 18 de gener de 2019

Abstract

The extended restricted three body problem studies the motion of three bodies such that their mutual interaction corresponds to a force $F \sim r^\alpha$ and that one of their masses is much smaller than the others, which means that this body will not affect the others' motion. In order to study the motion of this body, the two body problem for the other two will have to be solved and then, the less massive body will be introduced in the two body system without perturbing their motion. A simulator that calculates and draws the three orbits has been built.

Resum

El problema restringit estès de tres cossos estudia el moviment de tres cossos considerant que la seva interacció mútua correspon a una força del tipus $F \sim r^\alpha$ i que un d'ells té una massa molt més petita que els altres dos, és a dir, que aquest cos no afectarà al moviment dels altres dos cossos. Per estudiar el moviment d'aquest cos, primer s'haurà de resoldre el problema de dos cossos estès per els altres dos cossos i, després, s'introduirà el cos menys massiu en el sistema de dos cossos sense que influeixi en el seu moviment. S'ha construït un simulador que calcula i dibuixa les tres òrbites.

Agraïments

Vull agrair al meu tutor, Dr. Antoni Benseny, tota l'ajuda proporcionada durant aquest semestre, especialment quan han sorgit problemes a l'hora de programar.

També vull agrair a la família tot el suport durant aquests anys, especialment per aguantar-me durant les èpoques d'exàmens. I, evidentment, a tots els amics i companys que m'han ajudat a arribar fins aquí, sense tots ells no hagués estat possible.

Índex

1	Introducció	1
2	El problema de dos cossos estès	3
2.1	Reducció al problema de Kepler estès	3
2.2	Moment Angular	4
2.2.1	Segona Llei de Kepler	5
2.3	Energia	6
2.4	Classificació de les òrbites	6
2.5	Equació diferencial de l'òrbita	10
2.6	Cas gravitatori	13
3	Problema restringit el·líptic de 3 cossos	15
3.1	Regularització de Levi-Civita	17
4	Problema restringit estès de 3 cossos	19
4.1	Regularització	19
4.2	Cas $\mu = 0$	20
4.3	Cas circular	21
4.4	Cas el·líptic o fitat	23
4.5	Cas no fitat	26
5	Simulador	28
5.1	Funcionament del simulador	28
5.2	Programa	30
6	Conclusions	33
7	Annex	34
7.1	Mètode de Runge-Kutta	34
7.1.1	Mètode de Runge-Kutta-Fehlberg	35
7.2	Integrals el·líptiques	36

1 Introducció

Com a alumne del doble grau en Física i Matemàtiques, estava interessat en desenvolupar un Treball de Final de Grau que involucrés les dues disciplines. Ara bé, en estar estretament lligades, hi havia molts camps a partir dels quals fer un treball. Degut al meu interès per l'astrofísica, el problema restringit de tres cossos, que històricament ha tingut un paper destacat en l'estudi de la mecànica celeste, em va cridar l'atenció.

A més, estava interessat en un treball que involucrés la programació, un camp que desconeixia abans d'entrar a la carrera, però que m'ha atret molt al llarg d'aquests anys i trobava que, aprofundir-hi, podia ser una bona eina de cara al futur.

El projecte

En mecànica clàssica o quàntica, el problema de n cossos consisteix en modelar el moviment de n cossos tenint en compte, únicament, la seva interacció mútua. Un cas particular d'aquest problema és el problema de tres cossos que, generalment, no és resoluble analíticament.

Històricament, el problema gravitatori de tres cossos s'ha estudiat ampliament. La primera persona en estudiar analíticament aquest problema va ser Sir Isaac Newton, el 1687, que, en el *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, va analitzar el sistema Sol-Terra-Lluna, un dels problemes de tres cossos més estudiat. El gran avenç següent en l'estudi del problema va arribar a mitjans del segle XVIII amb Jean le Rond d'Alembert i Alexis Clairaut, que van ser els primers en intentar fer una anàlisi general del problema de tres cossos. Finalment, Heinrich Bruns i Henri Poincaré van demostrar el 1887 i 1889 respectivament que no existeix una solució analítica general del problema de tres cossos.

En aquest treball s'ha fet una simulació del problema restringit estès i pla de tres cossos que consisteix en considerar dos cossos orbitant en un pla i introduir un tercer cos sense que afecti al moviment dels altres dos. El problema s'anomena estès perquè no només es considera una força gravitacional, sinó que es considera una força central genèrica tal que $F \sim r^\alpha$.

Aquesta extensió permet estudiar el moviment de tres cossos en altres sistemes que no estiguin dominats per la força gravitatòria, com sistemes amb un camp de forces lineals de recuperació, associades a l'oscil·lador harmònic. Tot i que l'àmbit principal del problema de tres cossos és la mecànica celeste per a forces gravitatòries, aquesta extensió permet estudiar un cas fictici en què la força gravitatòria no fos del tipus $F \sim r^{-2}$.

El simulador que s'ha programat per resoldre el problema fa servir el mètode de Runge-Kutta-Fehlberg (integració numèrica) per calcular les òrbites a partir de les equacions del moviment dels tres cossos.

Estructura de la Memòria

La memòria comença estudiant analíticament el problema de dos cossos estès, ja que és la base del problema restringit estès de tres cossos. En aquest apartat es fa una anàlisi de l'energia i el moment angular en el problema de Kepler estès i s'estudia la solució particular per a una força gravitatòria.

Després es fa un breu resum del problema restringit de tres cossos el·líptic, és a dir, es presenta el problema restringit de tres cossos per a forces gravitatòries en el cas que les solucions del problema de dos cossos formin òrbites periòdiques. En aquest apartat també es fa una petita descripció de la regularització de Levi-Civita.

En la secció següent s'introdueix el problema restringit estès de tres cossos i es presenten algunes resolucions numèriques, tant per a casos particulars ja coneguts com per a casos més generals.

El cos del treball es conclou amb una explicació del funcionament del simulador que s'ha utilitzat per realitzar l'estudi del problema restringit estès de tres cossos i una explicació del programa i les seves funcions.

2 El problema de dos cossos estès

Siguin P_1 i P_2 dos cossos puntuals de masses m_1 i m_2 , respectivament.

Definició 2.1. *El problema de dos cossos estès consisteix en l'estudi del moviment de P_1 i P_2 considerant, únicament, una interacció mútua corresponent a una força del tipus*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -K m_1 m_2 r^\alpha \hat{e}_r$$

on $K \in \mathbb{R}$ és una constant, r és la distància entre P_1 i P_2 , α és l'exponent de la força com a potència de la distància i \hat{e}_r és el vector unitari amb la direcció i sentit de $P_2 - P_1$.

Sigui $(\mathcal{O}; x, y, z)$ un sistema de referència inercial amb origen a \mathcal{O} i sigui \vec{r}_i el vector posició de P_i respecte a \mathcal{O} ($i = 1, 2$). Aleshores, per la segona llei de Newton, les equacions del moviment dels cossos P_1 i P_2 són

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{21}(r) \\ m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{12}(r) \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1 Reducció al problema de Kepler estès

Per reduir el problema de dos cossos al problema de Kepler s'ha d'expressar l'equació 2.1 en funció dels vectors \vec{R} i \vec{r} , on \vec{R} és el vector posició del centre de masses i $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ és el vector de la posició relativa entre P_1 i P_2 .

Per fer aquest canvi, primer s'estudiarà el moviment del centre de masses del sistema, que també es pot anomenar baricentre. Si aquest es mou a velocitat constant, aleshores es podrà usar el sistema de referència centrat al baricentre, ja que serà un sistema de referència inercial. El vector posició \vec{R} del centre de masses es pot calcular fent servir que

$$M \vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2,$$

on $M = m_1 + m_2$. Sumant les dues equacions de (2.1) s'obté que

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = 0$$

i integrant aquesta equació,

$$M \frac{d\vec{R}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{C}.$$

Com es pot veure, el baricentre es mou a velocitat constant respecte a un sistema de referència inercial. Per tant, s'ha demostrat que el sistema de referència centrat al baricentre també és un sistema inercial.

Tenint en compte que

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M} \vec{r} \quad \text{i} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M} \vec{r} ,$$

amb el sistema de referència centrat al baricentre es té que $\vec{R} = 0$. Aleshores, prenent una de les equacions de (2.1), s'obté que

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \frac{m_1 m_2}{M} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{12}(r) ,$$

d'on es dedueix l'equació del **problema de Kepler** estès:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -K(m_1 + m_2) r^\alpha \hat{r} . \quad (2.2)$$

on \hat{r} és el vector unitari de la mateixa direcció i sentit que \vec{r} . El problema de Kepler es pot aplicar quan les forces estudiades siguin centrals i conservatives.

Definició 2.2. Una força $\vec{F}(r)$ és una **força central** si el vector director de la força passa per el centre de coordenades i el seu mòdul només depèn de r .

Definició 2.3. Un **camp central de forces** és un camp conservatiu amb potencial $V(r)$ quan

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r) \quad \implies \quad F(r) = -\frac{dV(r)}{dr} .$$

A continuació es veurà que, per a forces centrals i conservatives, hi ha conservació del moment angular i de l'energia. A partir d'ara, es prendrà $m_1 + m_2 = 1$ i totes les magnituds es consideraran per unitat de massa.

2.2 Moment Angular

Definició 2.4. Sigui \mathcal{O} un punt de l'espai qualsevol, \vec{r} un vector que va des de \mathcal{O} a un cos puntual i \vec{p} el moment lineal del cos, el **moment angular** respecte a \mathcal{O} d'aquest cos es defineix com:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} . \quad (2.3)$$

Definició 2.5. El **moment d'una força o parell** respecte a \mathcal{O} es defineix com:

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} . \quad (2.4)$$

Teorema 2.6. Teorema de conservació del moment angular

Si el moment d'una força \vec{N} és nul, aleshores es conserva el moment angular \vec{L} .

Per definició, una força central \vec{F} té la mateixa direcció que el vector \vec{r} , per tant, $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$. I, pel Teorema 2.6, es conservarà \vec{L} . D'aquí i de la definició de moment angular, es pot deduir que \vec{r} serà sempre perpendicular a \vec{L} , fet que només es pot complir si la corba descrita per a \vec{r} pertany a un pla perpendicular a \vec{L} . Per tant, el moviment dels dos cossos sota l'acció d'una força central serà un moviment pla. Per comoditat, es considerarà que aquest pla és $z = 0$.

Siguin $(r, \theta, 0)$ les coordenades polars de \vec{r} , el canvi de coordenades efectuat és $(x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$. Per tant,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta, \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta, 0)$$

i

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = ((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin \theta, (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \sin \theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \cos \theta, 0) .$$

Fàcilment es veu que el mòdul de la velocitat és

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$$

i la component radial de l'acceleració és

$$a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) .$$

Es pot comprovar que, en coordenades polars, el mòdul amb signe del moment angular és

$$l = r^2\dot{\theta} . \quad (2.5)$$

2.2.1 Segona Llei de Kepler

A la Figura 1 es pot veure que l'àrea escombrada pel vector \vec{r} entre els instants t i $t + dt$ és

$$dA = \frac{1}{2}r(t)r(t + dt) \sin(d\theta) ,$$

on $d\theta$ és l'angle entre els vectors $\vec{r}(t)$ i $\vec{r}(t + dt)$. Per tant, la variació d' A respecte al temps en un interval de temps molt petit ($dt \rightarrow 0$), que correspon a la velocitat areolar, és

$$\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} . \quad (2.6)$$

S'ha vist anteriorment que, sota l'acció de forces centrals, hi ha conservació del moment angular. Per tant, com que $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{l}{2}$, la velocitat areolar es conservarà per a una força central qualsevol. En el cas particular de la força gravitatòria, en què $F = -\frac{K}{r^2}$, s'obté la segona llei de Kepler, que estableix que el vector \vec{r} escombra àrees iguals en temps iguals. En conseqüència, es pot afirmar que la segona llei

de Kepler no només és vàlida per el cas gravitacional, sinó que es compleix per a qualsevol força central.

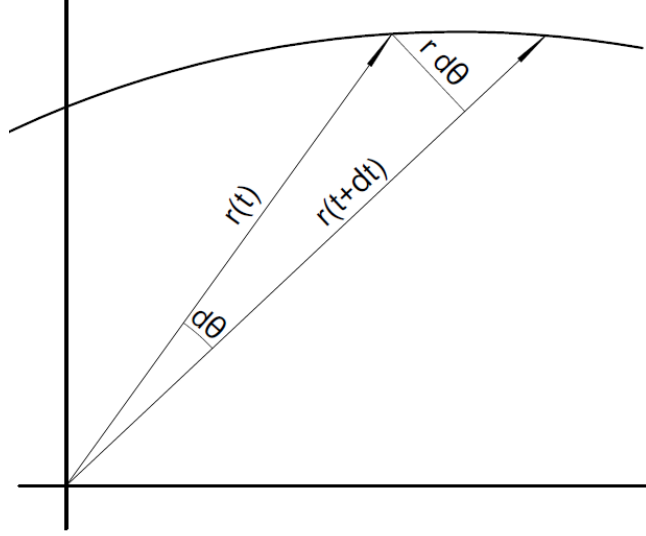


Figura 1: Àrea escombrada pel vector \vec{r} en un temps dt

2.3 Energia

Teorema 2.7. Teorema de conservació de l'energia

Si les forces que actuen sobre un cos són conservatives, aleshores l'energia total del cos es conserva.

Com que s'ha reduït el problema de dos cossos a un problema d'un sol cos i les forces estudiades són conservatives, es pot afirmar que l'energia es conservarà. Sigui

$$E = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r)$$

l'equació de l'energia, tenint en compte que $l = r^2\dot{\theta}$, aquesta també es pot expressar com:

$$E = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) + V(r) \quad (2.7)$$

2.4 Classificació de les òrbites

Ara bé, per poder calcular l'energia, falta determinar primer el potencial. En el cas particular que s'estudiarà,

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} K r^{\alpha+1} + C & \text{si } \alpha \neq -1 \\ K \ln(r) + C & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}$$

on V està determinat llevat de constant. Tot i que en forces gravitatòries és usual situar l'origen del potencial a l'infinit, o a l'origen de coordenades per altres tipus de forces, en aquest cas es situarà l'origen en $r = 1$, ja que per a certs valors de α , ja sigui en $r = 0$ o $r = \infty$, s'obté una indeterminació i no es podria anular el potencial. Per tant, s'obté

$$C = \begin{cases} -\frac{K}{\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ 0 & \text{si } \alpha = -1 \end{cases},$$

és a dir,

$$V(r) = \begin{cases} \frac{K}{\alpha+1}(r^{\alpha+1} - 1) & \text{si } \alpha \neq -1 \\ K \ln(r) & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}. \quad (2.8)$$

Per resoldre l'equació del moviment en el problema de dos cossos es pren l'equació (2.7) i se n'aïlla \dot{r} . Aleshores, s'obté que

$$\dot{r} = \sqrt{2\left(E - V(r)\right) - \frac{l^2}{r^2}}.$$

Si ara se suposa que $t(0) = 0$ i $r(0) = r_0$ i s'integra l'equació, s'obté:

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2\left(E - V(r)\right) - \frac{l^2}{r^2}}}. \quad (2.9)$$

Tot i que en aquesta equació es té $t(r)$ i, per tant, $r(t)$, és complicat poder determinar l'òrbita en funció del temps. En canvi, és més senzill determinar $r(\theta)$, especialment en el cas d'òrbites periòdiques. Fent servir l'equació (2.5) s'obté que

$$d\theta = \frac{l dt}{r^2}$$

integrant aquesta equació i prenent $\theta(0) = \theta_0$ s'obté que

$$\theta = l \int_0^t \frac{dt}{r^2(t)} + \theta_0 \quad (2.10)$$

A partir d'aquesta última equació, havent calculat prèviament el potencial, es poden determinar les òrbites per a uns E , l , r_0 i θ_0 determinats. Clàssicament, també es podrien resoldre aquestes equacions a partir de r_0 , \dot{r}_0 , θ_0 i $\dot{\theta}_0$. Ara bé, si aquests càlculs s'efectuen en el marc de la mecànica quàntica, els valors inicials de r i θ no tindran sentit, mentre que el sistema continuarà tenint una energia i un moment angular. Per tant, per evitar possibles problemes és millor determinar les equacions en funció d' E i l .

Ara s'estudiaran els tipus de moviments possibles en el sistema de referència $(P_1; x, y, z)$. Es considera una força efectiva $\mathcal{F}(r) = F(r) + \frac{l^2}{r^3}$, on el segon terme

representa la força centrífuga ordinària. A partir d'aquesta força s'obté la mateixa equació del moviment que s'obtindria amb $F(r)$ en un moviment unidimensional:

$$\ddot{r} = \mathcal{F}(r) = F(r) + \frac{l^2}{r^3} .$$

Això es comprovarà usant (2.13), que es veurà en l'apartat següent. El potencial efectiu equivalent serà

$$\mathcal{V}(r) = V(r) + \frac{1}{2} \frac{l^2}{r^2}$$

i l'energia del problema de dos cossos en aquest cas serà

$$E = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \mathcal{V}(r) .$$

Observació 2.8. Només hi haurà moviment per a $E > \mathcal{V}$. Altrament, es tindria una energia cinètica negativa.

Un cop fixats l i E es podran determinar els moviments del sistema tenint en compte aquesta observació.

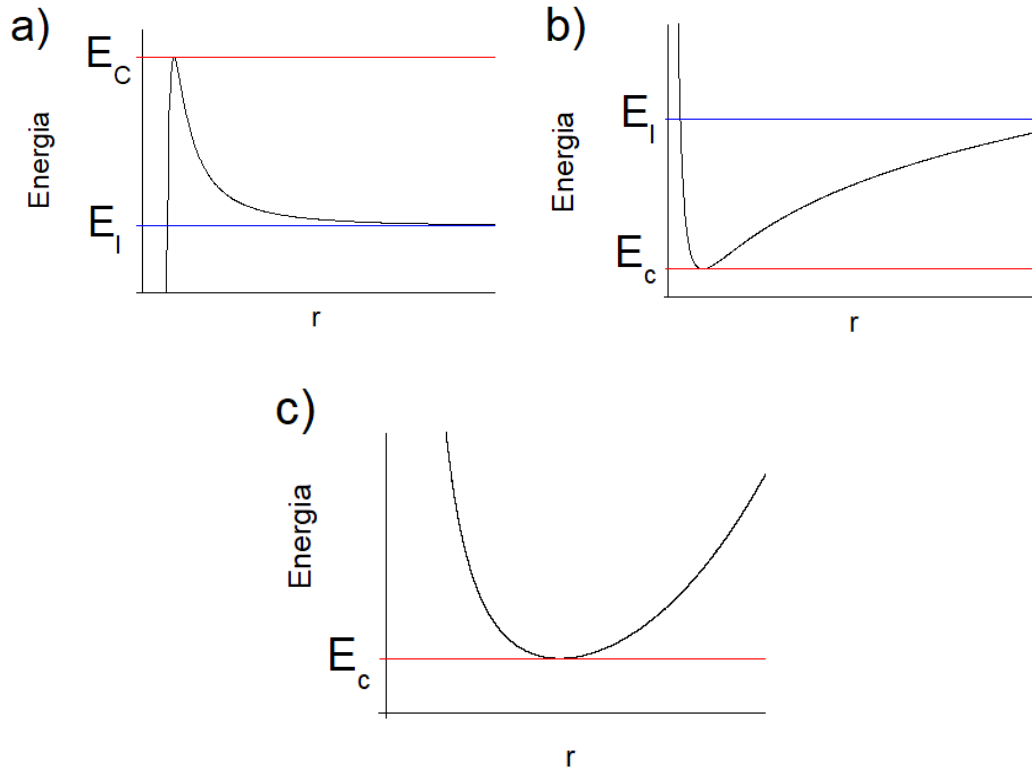


Figura 2: Gràfiques de tres possibles $\mathcal{V}(r)$. **a)** Cas $\alpha \ll 0$. **b)** Cas $\alpha < 0$. **c)** Cas $\alpha > 0$.

A la Figura 2a s'hi poden observar diferents tipus de moviments. E_c indica un moviment circular inestable. Per $E > E_c$, el moviment del cos no estarà fitat i tant hi podrà haver col·lisió entre els dos cossos com escapament (Figura 3a). Per a

$E \in [E_l, E_c]$, el moviment dependrà del radi inicial. Si el radi inicial és molt petit, la solució del problema de Kepler estarà fitada i hi podrà haver col·lisió; en canvi, a partir d'un cert radi el cos podrà moure's per tot l'espai excepte per un disc central. Finalment, per a $E < E_l$, el moviment estarà confinat a l'interior d'un disc (Figura 3b).

A la Figura 2b s'observa també un moviment circular per a $E = E_c$, però aquest moviment és estable (Figura 3e). E_l indica l'asímtota horitzontal de la funció. Per tant, per a $E \in [E_c, E_l]$ s'observarà que el radi r està fitat inferiorment i superiorment. Això indica que el cos tindrà un moviment oscil·lant entre aquestes dues fites, és a dir, formarà una el·lipse o una corba semblant a la de la Figura 3d. Finalment, per a $E > E_l$, el cos es podrà moure per tot l'espai excepte per un disc centrat a l'origen de coordenades (Figura 3c).

Finalment, a la Figura 2c només hi haurà dos tipus de moviments. O bé un moviment circular per a $E = E_c$ o bé un moviment el·líptic (o semblant a la Figura 3d) per a $E > E_c$.

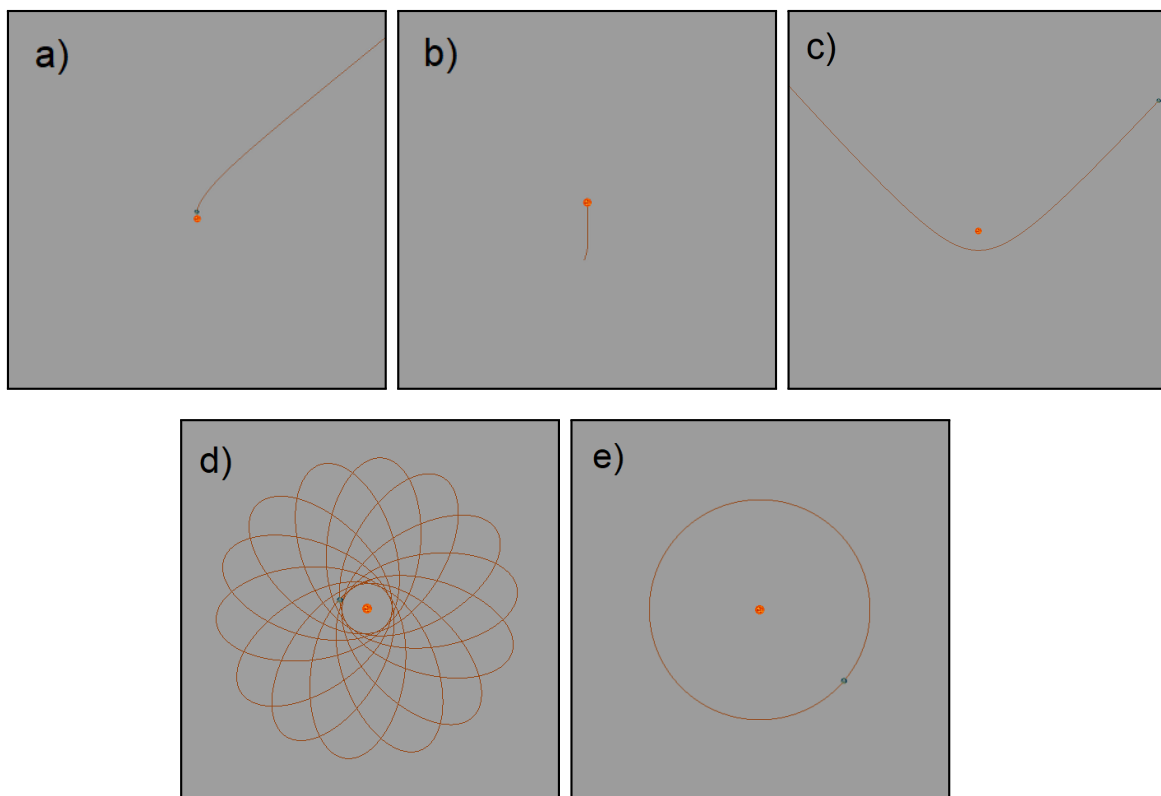


Figura 3: Possibles moviments en el problema estès de dos cossos.

Finalment, per acabar de fer una classificació de les òrbites, s'enunciarà el Teorema de Bertrand, que es podrà comprovar més endavant al dibuixar les òrbites keplerianes.

Teorema 2.9. Teorema de Bertrand

D'entre els potencials associats a forces centrals amb òrbites fitades, només dos tipus formaran òrbites tancades: $V \sim \frac{1}{r}$ i $V \sim r^2$.

2.5 Equació diferencial de l'òrbita

Sigui L el lagrangiana del sistema que s'està estudiant. Seguint la formulació lagrangiana, $L = T - V$ i, per tant,

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) . \quad (2.11)$$

Amb el lagrangiana també es poden determinar les equacions del moviment del sistema fent servir les anomenades equacions de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (2.12)$$

on q_j són les coordenades generalitzades del sistema. A partir d'aquesta equació es determinen les dues equacions del moviment:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{r}) - r\dot{\theta}^2 + \frac{dV(r)}{dr} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Prenent la primera equació i tenint en compte que $F(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}$, s'obté

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{r^3} = F(r) .$$

Aquesta equació determinarà $r(t)$, però ja s'ha esmentat que s'acostuma a determinar l'equació de l'òrbita $r(\theta)$. Per això, a partir de l'equació (2.5), es fa el canvi de variable corresponent.

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \quad \implies \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \right) .$$

Fent servir que $\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{d(1/r)}{d\theta}$ i fent el canvi de variable $\rho = \frac{1}{r}$, s'obté

$$l^2 \rho^2 \left(\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} + \rho \right) = -F\left(\frac{1}{\rho}\right) , \quad (2.14)$$

que és l'equació diferencial de l'òrbita. Aquest canvi també es pot fer en el pas previ a l'integració de l'equació (2.9) obtenint

$$d\theta = \frac{l dr}{r^2 \sqrt{2 \left(E - V(r) \right) - \frac{l^2}{r^2}}} .$$

Integrant i fent el canvi de variable $\rho = \frac{1}{r}$:

$$\theta = \theta_0 - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{l^2} \left(E - V(r) \right) - \rho^2}} . \quad (2.15)$$

En el cas particular de les forces centrals que tinguin un potencial com l'estudiat anteriorment, aquesta equació passa a tenir l'expressió següent:

$$\theta = \theta_0 - \begin{cases} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{l^2} \left(E + \frac{K}{\alpha+1} \right) - \frac{2K}{l^2(\alpha+1)} \rho^{-\alpha-1} - \rho^2}} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{l^2} \left(E - K \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) - \rho^2}} & \text{si } \alpha = -1 \end{cases} \quad (2.16)$$

Ara bé, aquesta equació no té una solució analítica per a qualsevol valor d' α , sinó que en la majoria dels casos s'haurà de resoldre numèricament. Tot i així, es pot estudiar per a quins valors d' α es podrà integrar l'expressió anterior. Primer s'estudiaran els casos en què $\alpha \in \mathbb{Z}$, suposant que $\alpha \neq -1$.

L'equació és integrable per a funcions circulars si el denominador té una forma semblant a $\sqrt{A\rho^2 + B\rho + C}$, és a dir, si el grau del polinomi és menor que 2. Això es complirà si $-(\alpha + 1) = \{0, 1, 2\}$, és a dir, si $\alpha = \{-2, -3\}$, on ja s'ha exclòs el cas $\alpha = -1$.

Si ara se suposa que $\alpha = 1$, s'obté l'equació següent:

$$\theta = \theta_0 - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{C - B\rho^{-2} - \rho^2}}$$

on B i C són les constants corresponents. Si a aquesta equació s'aplica el canvi $\rho^2 = x$, s'obtindrà

$$\theta = \theta_0 - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{2\sqrt{Cx - B - x^2}} ,$$

que és una funció integrable per a funcions circulars. Per tant, si $\alpha = \{1, -2, -3\}$, es podrà resoldre analíticament la funció per a funcions circulars.

També es pot estudiar si pot ser una integral el·líptica, que tenen per solucions combinacions de funcions el·líptiques. Una integral el·líptica és una integral del tipus

$$\int R(x, \omega) dx$$

on R és una funció racional de x i ω i aquesta última es defineix com una funció del tipus

$$\omega = \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}$$

amb almenys $A \neq 0$ o $B \neq 0$, ja que altrament la integral podria calcular-se mitjançant funcions circulars. Si es pren el cas més senzill en que $R = \frac{1}{\omega}$, es veu fàcilment que per a $\alpha = \{-4, -5\}$ es tindrà una integral el·líptica.

Si ara es multiplica el numerador i el denominador per ρ^n a l'equació (2.16), s'obté

$$\int \frac{\rho^n d\rho}{\sqrt{A\rho^{2n} - B\rho^{2n-\alpha-1} - \rho^{2(n+1)}}} ,$$

que serà una integral el·líptica si $n = \{0, 1\}$. Com $n = 0$ correspon al cas anterior, es prendrà $n = 1$. En aquest cas, es té que la integral és resoluble per funcions el·líptiques si $\alpha = \{1, 0, -1, -2, -3\}$, on s'ha de remarcar que els casos $\alpha = \{1, -2, -3\}$ seran funcions circulars i s'està exclouent el cas $\alpha = -1$. Per tant, $\alpha = 0$ es pot afegir als casos resolubles per a funcions el·líptiques.

Si a aquesta última equació, prenent $n = 1$, se li aplica el canvi de variable $\rho^2 = x$, s'obté la integral següent:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax - Bx^{\frac{1-\alpha}{2}} - x^2}} ,$$

que és una integral el·líptica quan $\frac{1-\alpha}{2} = \{3, 4\}$, és a dir, quan $\alpha = \{-5, -7\}$. Si ara es multiplica el numerador i el denominador per x , aleshores s'obté que la integral és el·líptica per a $\frac{5-\alpha}{2} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, és a dir, s'obté que els casos nous són $\alpha = \{5, 3\}$.

Per tant, tots els casos resolubles per a funcions el·líptiques seran

$$\alpha = \{5, 3, 0, -4, -5, -7\} .$$

I tots els casos resolubles per a funcions circulars o el·líptiques són

$$\alpha = \{5, 3, 1, 0, -2, -3, -4, -5, -7\} . \quad (2.17)$$

El cas $\alpha = -1$ s'ha descartat dels casos anteriors per diverses raons. Per començar, l'equació en aquest cas és diferents dels casos $\alpha \neq -1$ i no es pot tractar com s'ha fet amb els altres. A més,

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{l^2} \left(E - K \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) - \rho^2}}$$

no té solució analítica, sinó que s'ha de resoldre mitjançant mètodes numèrics. Per tant, l'equació (2.16) no serà resoluble analíticament per a $\alpha = -1$.

També hi ha casos en què tenim una integral el·líptica, però $\alpha \notin \mathbb{Z}$ sinó que $\alpha \in \mathbb{Q}$. Per estudiar per a quins valors de α es produeix aquest fenomen es partirà de l'equació (2.16), en la que la integral es pot reduir a

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{A\rho^2 + B\rho^{-\alpha-1} + C}} .$$

Primer, fent el canvi de variable $t = \sqrt{\rho}$, s'obté la següent integral:

$$\int \frac{2t dt}{\sqrt{At^4 + Bt^{-2(\alpha+1)} + C}} .$$

Com ja es té que $A \neq 0$, aleshores es pot complir que $-2(\alpha + 1) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, és a dir, $\alpha = \{-1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, -3\}$. Per tant, s'obtenen dos casos no enters que no s'havien obtingut previament.

També hi ha altres canvis de variable que resulten en una integral el·líptica i compleixen que $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Per exemple $t = \rho^{2/3}$ que resulta en la integral

$$\int \frac{3t dt}{2\sqrt{At^3 + Bt^{-\frac{3}{2}(\alpha+1)} + C}} .$$

En aquest cas, com $A \neq 0$ es torna a obtenir que $-\frac{3}{2}(\alpha + 1) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, d'on s'obté que els casos nous són $\alpha = \{-\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{11}{3}\}$. Si en aquesta última integral multipliquem el numerador i el denominador per \sqrt{t} , s'obté

$$\int \frac{3t^{3/2} dt}{2\sqrt{At^4 + Bt^{-\frac{3}{2}(\alpha+1/3)} + Ct}} .$$

I, suposant que $-\frac{3}{2}(\alpha + \frac{1}{3}) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, s'obté un únic cas nou, $\alpha = -\frac{1}{3}$.

Per tant, hi ha més casos que els que s'han vist anteriorment, en els quals només s'han tingut en compte valors enters d' α . Els casos nous són

$$\alpha = \left\{ -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{11}{3} \right\} . \quad (2.18)$$

2.6 Cas gravitatori

En el cas d'una força gravitatòria, la força es pot expressar com

$$\vec{F} = -\frac{Km_1m_2}{r^2} \hat{r} ,$$

és a dir, $\alpha = -2$. Si es pren l'equació diferencial de l'òrbita (2.14) per a aquest cas concret s'obté

$$l^2 \rho^2 \left(\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} + \rho \right) = K \rho^2$$

que també es pot escriure com

$$\frac{d^2 \rho}{d\theta^2} + \rho = \frac{K}{l^2} . \quad (2.19)$$

Aquesta equació es pot resoldre analíticament, com ja s'ha vist en l'apartat anterior, ja que $\alpha = -2$. En aquest cas s'obté

$$\rho(\theta) = \frac{K}{l^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

on A i θ_0 són constants d'integració. Si s'inverteix aquesta equació per obtenir el radi r en funció de θ s'obté

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (2.20)$$

sent $p = \frac{l^2}{K}$ i $e = Ap$. Aquesta equació correspon a l'equació en coordenades polars d'una cònica amb origen en un dels focus i, depenent del valor de l'excentricitat, s'obtingran diferents tipus de còniques.

També es podria calcular l'equació de l'òrbita per energies i fent servir que, en el cas gravitatori, el potencial serà $V = \frac{K}{r}$. Com en aquest apartat s'està treballant en un cas concret, per comoditat s'ha situat l'origen de potencial en $r = \infty$. Així, substituïnt a l'equació vista prèviament, s'obté

$$\dot{r} = \sqrt{2 \left(E - \frac{K}{r} \right) - \frac{l^2}{r^2}},$$

que si s'integra i es compara amb (2.20) s'obté la relació entre l'energia i l'excentricitat següent:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2l^2 E}{K^2}}.$$

Per tant, es pot determinar quin tipus de cònica s'obté a partir de l'excentricitat o a partir de l'energia:

	Excentricitat	Energia
Circumferència	$e = 0$	$E = -\frac{K^2}{2l^2}$
El·lipse	$0 < e < 1$	$-\frac{K^2}{2l^2} < E < 0$
Paràbola	$e = 1$	$E = 0$
Hipèrbola	$e > 1$	$E > 0$

3 Problema restringit el·líptic de 3 cossos

Siguin P_1 , P_2 i P_3 tres cossos puntuals de masses m_1 , m_2 i m_3 , respectivament.

Definició 3.1. *El problema de tres cossos consisteix a determinar les posicions i velocitats de P_1 , P_2 i P_3 considerant només la seva interacció mútua.*

Definició 3.2. *El problema restringit de tres cossos suposa que $m_3 \ll m_1, m_2$ i que, per tant, el moviment de P_3 no afectarà ni a P_1 ni a P_2 , que tindran un moviment definit pel problema de dos cossos. El cos P_1 serà anomenat primari, el P_2 secundari i quan es parli dels dos cossos s'anomenaran primaris.*

En el cas del problema restringit el·líptic se suposa que P_2 es mou en una òrbita el·líptica al voltant de P_1 . Per tant, com s'ha vist en l'apartat anterior, la interacció entre els cossos ha de ser mitjançant la força gravitatòria, ja que en qualsevol altre cas, el moviment relatiu dels primaris no serà el·líptic i, a més, $e \in [0, 1)$. Com s'ha vist, l'equació d'aquesta el·lipse serà

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (3.1)$$

Definició 3.3. *Sigui θ_0 l'angle corresponent al pericentre de l'el·lipse, l'anomalia vertadera f serà $f = \theta - \theta_0$, és a dir, l'angle escombrat a partir del pericentre.*

Per tant, l'equació de la cònica que formen els dos primaris es pot expressar com

$$r(f) = \frac{l^2}{1 + e \cos f}$$

ja que s'ha suposat que $K = 1$ i, per tant, es té que $p = l^2$.

Observació 3.4. Ja s'ha vist anteriorment que el moviment dels primaris és un moviment pla i s'ha considerat $z = 0$. Per comoditat, s'obviarà l'eix z i es treballarà amb un sistema de referència de dues dimensions.

Definició 3.5. *Sigui $(\mathcal{O}; X, Y)$ el sistema de referència en què \mathcal{O} és el centre de masses dels primaris, X és l'eix on estan situats els primaris en l'instant inicial i Y és l'eix perpendicular a X , aquest sistema s'anomena **sistema de referència sideri**.*

En aquest sistema de referència, les posicions dels primaris són

$$\begin{aligned} (X_1, Y_1) &= (\mu r \cos f, \mu r \sin f) \\ (X_2, Y_2) &= ((\mu - 1)r \cos f, (\mu - 1)r \sin f) \end{aligned}$$

i la distància del tercer cos a P_i és $R_i = \sqrt{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2}$, amb $i = 1, 2$, on (X, Y) és la posició del tercer cos. El hamiltonià en aquest sistema de referència serà

$$\mathcal{H}(X, Y, p_X, p_Y) = \frac{1}{2}(p_X^2 + p_Y^2) - \frac{1-\mu}{R_1} - \frac{\mu}{R_2} \quad (3.2)$$

i les seves equacions del moviment, deduïdes a partir de la formulació hamiltoniana, seran:

$$\begin{cases} \dot{X} = p_X \\ \dot{Y} = p_Y \\ \dot{p}_X = -\frac{(1-\mu)(X-X_1)}{R_1^3} - \frac{\mu(X-X_2)}{R_2^3} \\ \dot{p}_Y = -\frac{(1-\mu)(Y-Y_1)}{R_1^3} - \frac{\mu(Y-Y_2)}{R_2^3} \end{cases} \quad (3.3)$$

Ara bé, aquest sistema de referència no és gaire còmode per treballar i s'efectuarà un canvi de coordenades per tenir un sistema de referència que tingui la mateixa velocitat angular que els dos cossos primaris.

Definició 3.6. *Un sistema de referència sinòdic $(\mathcal{O}; x, y)$ és un sistema que rota anàlogament amb els dos primaris i que manté les seves posicions al llarg de l'eix x .*

Ara bé, en aquest cas, s'ha de tenir en compte que la distància entre els dos primaris no serà constant, ja que el seu moviment relatiu és una el·lipse.

Definició 3.7. *Segui $(\mathcal{O}; x, y)$ el sistema de referència sinòdic que manté les posicions dels dos primaris fixades en l'eix x , s'anomenarà **sistema de referència sinòdic polsant**, ja que s'ha de tenir en compte tant el canvi al sistema sinòdic com la oscil·lació que tindrem en el radi.*

El canvi de coordenades efectuat ha sigut:

$$\begin{aligned} x &= \frac{X \cos f + Y \sin f}{r} \\ y &= \frac{-X \sin f + Y \cos f}{r} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Aquest canvi es fa en el lagrangià equivalent al hamiltonià anterior i després es tornarà a obtenir el hamiltonià del sistema sinòdic polsant. Per fer aquest canvi s'ha de tenir en compte que $dt = \frac{r^2}{l} df$.

En aquest cas, les coordenades dels dos cossos primaris són

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (\mu, 0) \\ (x_2, y_2) &= (\mu - 1, 0) \end{aligned}$$

i la distància del tercer cos a P_1 i a P_2 és $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$, on (x, y) és la posició del tercer cos. Es pot comprovar fàcilment que $R_i^2 = r^2 r_i^2$. Finalment, el hamiltonià en el sistema de referència sinòdic polsant és:

$$\mathcal{H}(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2} ((p_x + y)^2 + (p_y - x)^2) - \frac{1}{1 + e \cos f} \left(\frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \quad (3.5)$$

i les seves equacions del moviment corresponents són

$$\begin{cases} x' = p_x + y \\ y' = p_y - x \\ p'_x = p_y - x + \frac{1}{1 + e \cos f} \left(x - \frac{(1 - \mu)(x - \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - \mu + 1)}{r_2^3} \right) \\ p'_y = -p_x - y + \frac{1}{1 + e \cos f} \left(y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \right) \end{cases} \quad (3.6)$$

on les primes indiquen la derivada respecte f , mentre que els punts usats anteriorment indiquen la derivada respecte el temps [5].

3.1 Regularització de Levi-Civita

Ara bé, apareixen singularitats en les col·lisions, en què les forces no estan fitades. Les òrbites properes a aquestes col·lisions no es poden calcular amb precisió. Per evitar aquestes singularitats s'introdueix la regularització de Levi-Civita, que consisteix en fer un canvi de coordenades en l'espai i el temps en els hamiltonians primaricèntric $\mathcal{H}_1(x_1, y_1, p_{x1}, p_{y1})$ o secundaricèntric $\mathcal{H}_2(x_2, y_2, p_{x2}, p_{y2})$, depenent del cos al qual s'apropa.

La regularització de Levi-Civita consisteix en fer el canvi de coordenades següent, introduint un temps regularitzador τ_i , on i determina amb quin P_i podria haver-hi una col·lisió:

$$\begin{cases} x_i = \xi_i^2 + \eta_i^2 \\ y_i = 2\xi_i\eta_i \\ \frac{dt}{d\tau_i} = 4(\xi_i^2 + \eta_i^2) \end{cases} \quad (3.7)$$

Tenint en compte que són dos casos equivalents, només s'estudiaran els casos de col·lisions amb els primaris. El hamiltonià sinòdic primaricèntric serà:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(x_1, y_1, p_{x1}, p_{y1}) = & \frac{1}{2} ((p_{x1} + y_1)^2 + (p_{y1} - x_1 - \mu)^2) \\ & - \frac{1}{1 + e \cos f} \left(\frac{1}{2} ((x_1 + \mu)^2 + y_1^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

on $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ i $r_2 = \sqrt{(x_1 + 1)^2 + y_1^2}$. Un cop aplicat el canvi de coordenades i havent fet els càlculs corresponents, el hamiltonià obtingut és:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1(\xi_1, \eta_1, p_{\xi_1}, p_{\eta_1}) = & \frac{p_{\xi_1}^2 + p_{\eta_1}^2}{8(\xi_1^2 + \eta_1^2)} - \frac{1}{2}(\xi_1 p_{\eta_1} - \eta_1 p_{\xi_1}) - \mu \frac{1}{2(\xi_1^2 + \eta_1^2)}(\eta_1 p_{\xi_1} + \xi_1 p_{\eta_1}) \\
& + \frac{1}{1 + e \cos f} \left(-(1 - \mu) \frac{1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} - \mu \frac{1}{\sqrt{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2 + 2(\xi_1^2 - \eta_1^2) + 1}} \right) \\
& + \frac{e \cos f}{1 + e \cos f} \left(\frac{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2}{2} + \frac{\mu}{2} + \mu(\xi_1^2 - \eta_1^2) \right)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Aquestes equacions s'han extret d'un Treball de Final de Grau que va estudiar el problema restringit el·líptic de tres cossos [6].

4 Problema restringit estès de 3 cossos

Siguin P_1 , P_2 i P_3 tres cossos puntuals de masses m_1 , m_2 i m_3 respectivament.

Definició 4.1. *El problema restringit estès de tres cossos consisteix en un problema restringit de tres cossos en el qual no només es té en compte la força gravitatòria, sinó que la força d'interacció és una força central del tipus*

$$\vec{F} = -Kr^\alpha \hat{r}.$$

El problema restringit el·líptic es pot escriure usant la formulació lagrangiana i hamiltoniana perquè es coneix prèviament l'òrbita i, per tant, la posició i velocitat dels dos primaris en cada instant (o en cada valor de l'anomalia vertadera f). Però en el primer apartat d'aquest treball ja s'ha vist que l'equació de l'òrbita no és resoluble analíticament $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Per aquest motiu no n'hi haurà prou amb resoldre numèricament les equacions del moviment del tercer cos, com en el problema restringit el·líptic, sinó que primer s'haurà de resoldre numèricament el problema de Kepler estès i, simultàniament, les equacions del moviment del tercer cos.

En no poder resoldre analíticament el problema de Kepler estès, no es podrà obtenir el hamiltonià del sistema i s'haurà de buscar una alternativa a la formulació lagrangiana i hamiltoniana. Per això es farà servir la segona llei de Newton per escriure les equacions del moviment en el sistema sideri. Primer, es consideraran les equacions del moviment del problema de Kepler estès:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -Kxr^{\alpha-1} \\ \ddot{y} = -Ky r^{\alpha-1} \end{cases} \quad (4.1)$$

on (x, y) és la coordenada del vector \vec{r} i r la distància entre els dos primaris. Siguin $(X_1, Y_1) = \mu(x, y)$, $(X_2, Y_2) = (\mu - 1)(x, y)$ i (X, Y) les coordenades de P_1 , P_2 i P_3 , respectivament i siguin $r_1 = \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2}$ i $r_2 = \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2}$ les distàncies del tercer cos a P_1 i P_2 , aleshores les equacions del moviment del tercer cos són:

$$\begin{cases} \ddot{X} = -K \left((1 - \mu)(X - X_1)r_1^{\alpha-1} + \mu(X - X_2)r_2^{\alpha-1} \right) \\ \ddot{Y} = -K \left((1 - \mu)(Y - Y_1)r_1^{\alpha-1} + \mu(Y - Y_2)r_2^{\alpha-1} \right) \end{cases} \quad (4.2)$$

En resum, per poder obtenir una solució del problema restringit estès de tres cossos s'hauran de resoldre numèricament (4.1) i (4.2).

4.1 Regularització

Com s'ha vist en el cas el·líptic, en la resolució del problema de tres cossos poden haver-hi singularitats quan $r_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$). Aquestes singularitats apareixeran en (4.2), provocant que $r_i^{\alpha-1} \rightarrow \infty$. Per tant, per a $\alpha > 0$ no hi haurà cap singularitat

però, per a $\alpha < 0$, aquestes singularitats poden provocar errors sense control en el càlcul de l'òrbita. La regularització de Levi-Civita funciona per al cas $\alpha = -2$ i, per tant, no es pot aplicar en el cas general.

Per a tal fi, s'ha introduït un temps regularitzador τ_i per als casos en què $\alpha < 0$, tal que

$$\frac{dt}{d\tau_i} = r_i^{-\alpha}.$$

En aquest cas, el sistema (4.2) passarà a ser:

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{d\tau_i^2} = r_i^{-\alpha} \frac{d}{dt}(r_i^{-\alpha} \dot{X}) = r_i^{-2\alpha} \left(\ddot{X} - \frac{\alpha}{r_i} \dot{r}_i \dot{X} \right) \\ \frac{d^2 Y}{d\tau_i^2} = r_i^{-\alpha} \frac{d}{dt}(r_i^{-\alpha} \dot{Y}) = r_i^{-2\alpha} \left(\ddot{Y} - \frac{\alpha}{r_i} \dot{r}_i \dot{Y} \right) \end{cases}$$

Tot i així, el sistema es pot expressar de manera més senzilla si, enlloc de les segones derivades, s'expressa tot en funció de les primeres derivades. Sigui $X' = \frac{dX}{d\tau_i}$, $\dot{X} = \frac{dX}{dt} = V_X$ i $V'_X = \frac{dV_X}{d\tau_i}$ (anàlogament per Y), el sistema anterior es pot expressar com:

$$\begin{cases} X' = r_i^{-\alpha} V_X \\ V'_X = -r_i^{-\alpha} K \left((1 - \mu) (X - \mu x) r_1^{\alpha-1} + \mu (X - (\mu - 1)x) r_2^{\alpha-1} \right) \\ Y' = r_i^{-\alpha} V_Y \\ V'_Y = -r_i^{-\alpha} K \left((1 - \mu) (Y - \mu y) r_1^{\alpha-1} + \mu (Y - (\mu - 1)y) r_2^{\alpha-1} \right) \end{cases} \quad (4.3)$$

Per estudiar el moviment del tercer cos en el problema estès es començarà estudiant casos particulars, per als quals les òrbites siguin conegudes, després s'estudiaran els casos en què les òrbites dels primaris estiguin fitades i, finalment, es veuran alguns casos en què la solució del problema de Kepler no estarà fitada. Aquest estudi s'efectuarà a partir d'un simulador que calcula numèricament les òrbites dels tres cossos. En la secció següent està explicat el seu funcionament.

4.2 Cas $\mu = 0$

Si ara se suposa $\mu = 0$, és a dir, que la massa d'un dels primaris és nul·la, aleshores el sistema d'equacions del moviment del tercer cos s'hauria de reduir a les equacions del moviment del problema de Kepler. Com era d'esperar, suposant $\mu = 0$, es redueix el sistema (4.2) a

$$\begin{cases} \ddot{X} = -K X r_1^{\alpha-1} \\ \ddot{Y} = -K Y r_1^{\alpha-1} \end{cases}$$

on $r_1 = \sqrt{X^2 + Y^2}$, que és el resultat esperat, ja que coincideix amb (4.1), que són les equacions del moviment del problema de Kepler.

Aquest resultat s'ha comprovat amb el simulador, amb el qual s'han obtingut les òrbites de la Figura 4. Comparant aquests resultats amb els de la Figura 3, on estan representades algunes òrbites obtingudes en el problema estès de dos cossos, es veu fàcilment que per $\mu = 0$ s'obtenen el mateix tipus d'òrbites.

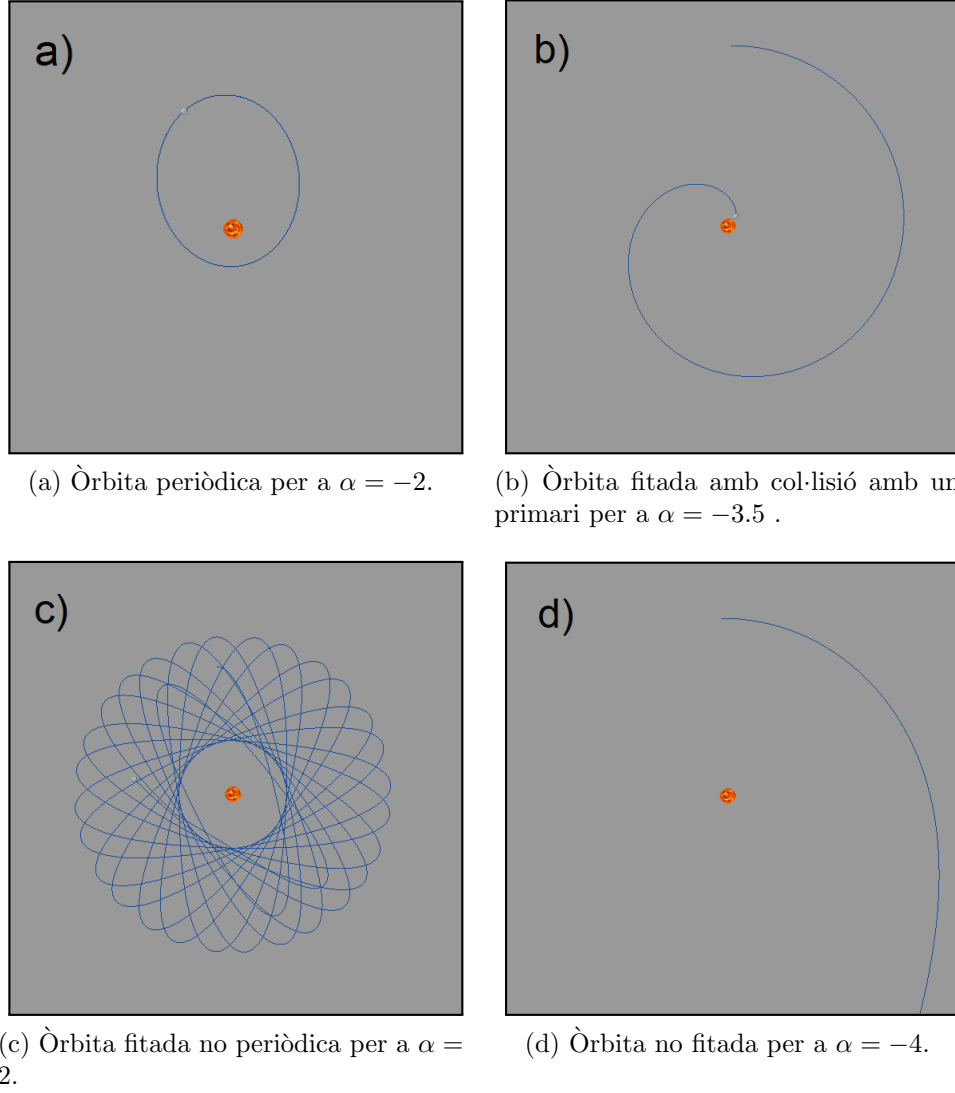


Figura 4: Possibles moviments en el problema estès de tres cossos per al cas $\mu = 0$.

4.3 Cas circular

En aquest apartat, s'estudiarà les òrbites del tercer cos en els casos en què el moviment relatiu entre els dos primaris és un moviment circular. En aquest cas, $\dot{r} = 0$ i $\frac{dV}{dr} = 0$. Per tant, les òrbites dels primaris han de complir:

$$\begin{cases} E = \frac{l^2}{2r^2} + V(r) \\ r^\alpha = \frac{l^2}{r^3} \end{cases} \quad (4.4)$$

Tenint en compte aquestes condicions s'han estudiat diversos casos per a diferents valors de α .

- $\alpha = -3$

En aquest cas, per obtenir òrbites circulars s'ha pres $\mu = 0.4$, $E = 0$, $l = 1$ i $r = 1$. Com es pot veure a la Figura 5, en aquest cas el tercer cos tindrà dos tipus d'òrbites, o bé col·lisionarà amb un dels primaris (Figura 5a) o bé escaparà de la seva interacció (Figura 5b). Aquestes visualitzacions s'han efectuat per a una velocitat inicial nul·la, però s'ha observat que els resultats per a altres velocitats i angles són equivalents.

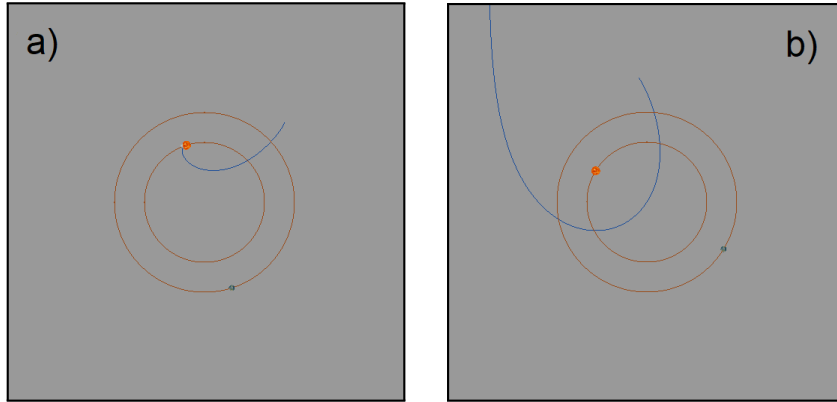


Figura 5: Possibles òrbites observades per a $\alpha = -3$.

- $\alpha = -2$

En aquest cas, els paràmetres escollits han sigut $\mu = 0.4$, $E = -0.5$, $l = 1$ i $r = 1$. Les imatges de la Figura 6 mostren una òrbita fitada (Figura 6a) i una segona òrbita que acaba escapant de l'abast dels primaris. La primera visualització s'ha efectuat amb una velocitat inicial nul·la, mentre que la segona té una velocitat inicial de mòdul $V_0 = 0.7$ i direcció horitzontal.

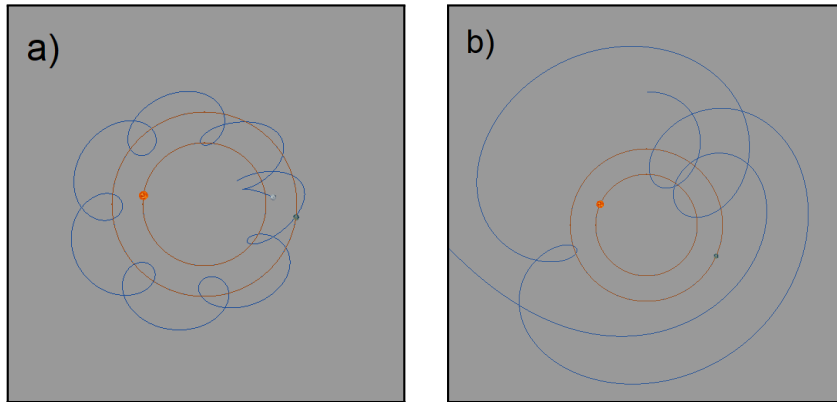


Figura 6: Possibles òrbites observades per a $\alpha = -2$.

- $\alpha = 1$

Per a aquest valor de α , els paràmetres escollits han sigut $\mu = 0.4$, $E = 4$, $l = 4$ i $r = 2$. En aquest cas, s'han estudiat les possibles òrbites per a diferents velocitats inicials, començant totes les òrbites en el mateix punt, marcat en negre a les visualitzacions. La Figura 7a correspon a la velocitat inicial $V_0 = 0$. A les imatges b, c i d, la velocitat inicial s'ha anat augmentant gradualment mantenint un angle de 0° amb la horitzontal i a la imatge e, el mòdul de la velocitat és el mateix que en la d, però canvia la direcció inicial. Com es pot veure a la Figura 7, la velocitat inicial del tercer cos determina l'obliquïtat de la seva el·lipse i, comparant la imatge 7d amb 7e, es pot veure que els casos obtinguts són equivalents per a diferents orientacions de la velocitat.

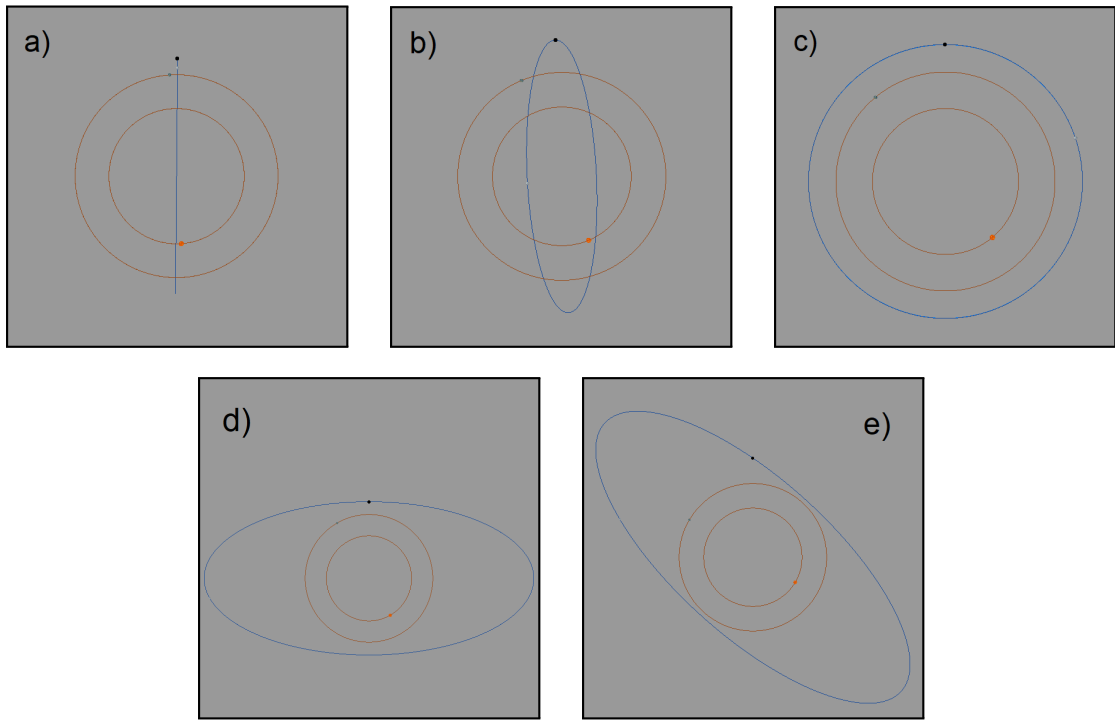


Figura 7: Possibles òrbites observades per a $\alpha = 1$.

4.4 Cas el·líptic o fitat

En aquest apartat, s'estudiaran les òrbites del tercer cos en el cas que la solució del problema de Kepler tingui un radi r tal que $r \in [r_1, r_2]$, on r_1 i r_2 són dos radis fixats. Si $\alpha = -2$ es recuperaran les solucions del problema restringit el·líptic.

- $\alpha = -2$

Aquest és un cas conegut, ja que al ser el cas d'una força gravitacional s'ha estudiat extensament. Els primaris formaran una òrbita periòdica que tindrà una excentricitat e tal que $0 < e < 1$. En aquest cas, s'ha pres $\mu = 0.35$, $E = -0.6$ i $l = 0.7$ per a les visualitzacions de la Figura 8, que s'han efectuat

amb una velocitat inicial nul·la. Com es pot veure, en la Figura 8a el tercer cos es manté orbitant al voltant del cos primari (s'obtindria el mateix per al cos secundari si es deixés inicialment el tercer cos a prop d'aquest), mentre que en la Figura 8b el tercer cos orbita al voltant dels dos primaris i acaba escapant.

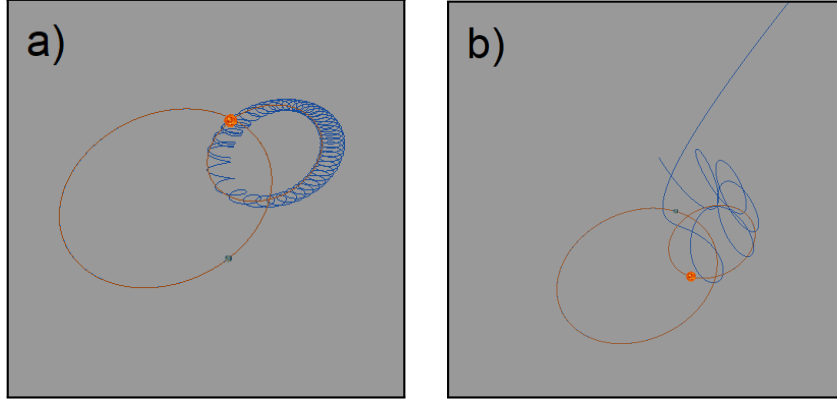


Figura 8: Possibles òrbites observades per a $\alpha = -2$.

- $\alpha = 1$

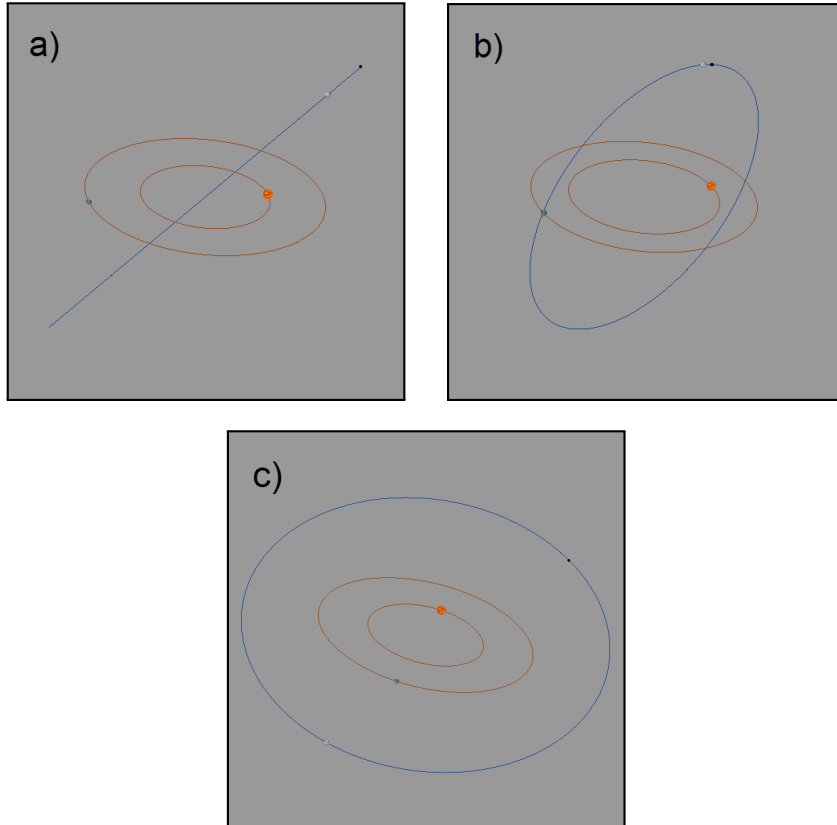


Figura 9: Possibles òrbites observades per a $\alpha = 1$.

Com es pot observar a la Figura 9, en aquest cas les òrbites dels primaris també són periòdiques. Tot i així, l'òrbita del tercer cos és molt diferent a la del cas

anterior. De fet, s'observen unes òrbites equivalents a les del cas circular per a $\alpha = 1$. Aquestes visualitzacions s'han efectuat per als paràmetres $\mu = 0.35$, $E = 0.9$ i $l = 0.7$. La Figura 9a té una velocitat inicial nul·la, la 9b té una velocitat inicial de mòdul $V_0 = 0.6$ i direcció horitzontal i la 9c té una velocitat inicial de mòdul $V_0 = 1.3$ i direcció $\beta_0 = -22^\circ$ respecte la horitzontal.

- $\alpha = 4$

En aquest cas, els primaris tenen unes òrbites fitades i, com es veu a la Figura 10, l'òrbita del tercer cos també està fitada per a un cert radi. En aquest cas, les visualitzacions s'han efectuat per als paràmetres $\mu = 0.4$, $E = 2$ i $l = 0.8$. Les Figures 10a, 10b i 10c corresponen a casos en què el tercer cos està inicialment fora de les òrbites generades pels primaris. La diferència entre els tres casos són les velocitats inicials del tercer cos. La Figura 10a correspon a una velocitat inicial nul·la, la 10b, correspon a una velocitat inicial de mòdul $V_0 = 1$ i en la direcció de l'eix x i la 10c correspon a una velocitat inicial de mòdul $V_0 = 5$ i direcció horitzontal. Pel que fa a les Figures 10d i 10e, el tercer cos comença el seu moviment molt a prop de centre de masses. En el cas 10d, la velocitat inicial és nul·la, mentre que la velocitat en la Figura 10e té mòdul $V_0 = 1$ i direcció horitzontal.

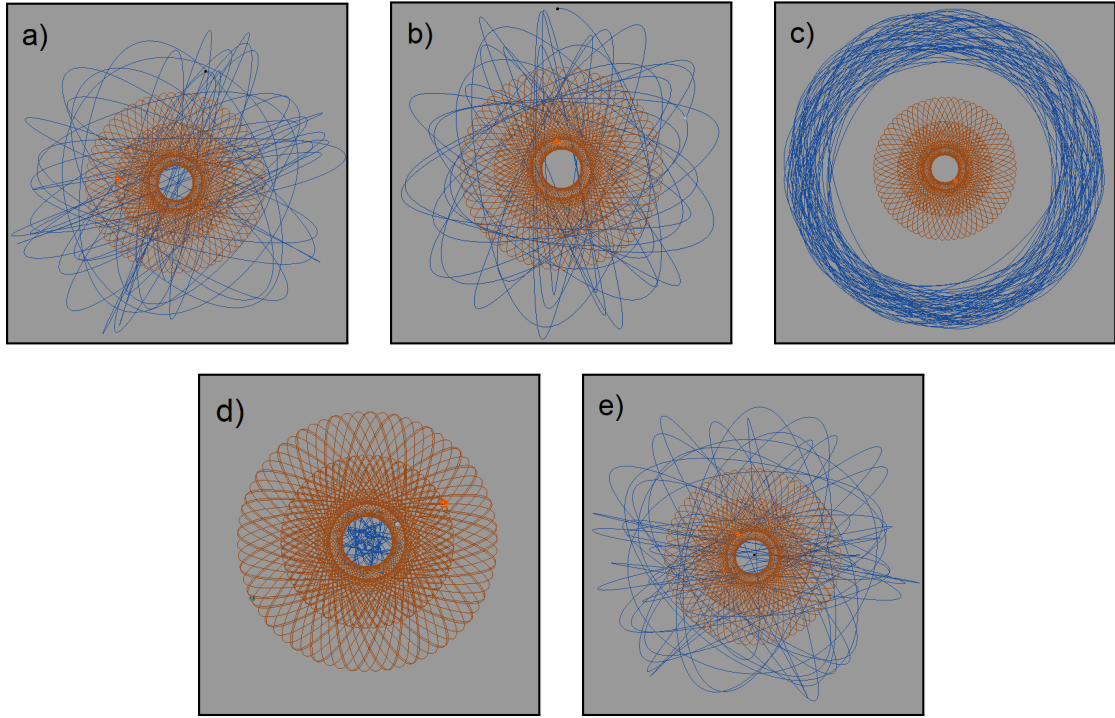


Figura 10: Possibles òrbites observades per a $\alpha = 4$.

Aquests són alguns dels possibles casos per a òrbites dels primaris que estiguin fitades. Ara bé, també hi ha casos en què aquestes òrbites no estan fitades i formen corbes parabòliques o hiperbòliques, entre d'altres.

4.5 Cas no fitat

En aquest apartat es veuran diferents visualitzacions en les quals les òrbites dels primaris no estan fitades, és a dir, els dos primaris podran moure's per tot l'espai. Cal recordar que $\forall \alpha > -1$, els primaris tenen òrbites que estaran fitades per a algun r determinat.

- $\alpha = -1.5$

En aquest cas s'han pres els paràmetres adequats per tal de no tenir una òrbita dels primaris fitada. Aquests paràmetres han sigut $m = 0.4$, $E = 2$ i $l = 0$. La Figura 11 s'ha inicialitzat amb una velocitat inicial del tercer cos nul·la i, com es pot observar, aquest cos va orbitant al voltant d'un dels dos cossos primaris. S'han provat altres visualitzacions amb diferents velocitats inicials però, eventualment, en tots els casos s'obtenia el mateix resultat que en la Figura 11 amb petites variacions.

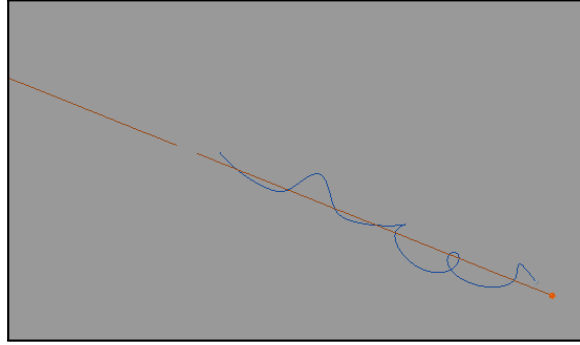


Figura 11: Una de les possibles òrbites observades per a $\alpha = -1.5$.

- $\alpha = -2$

En aquest cas, tenim dos tipus de corbes provinents del problema de Kepler: les paràboles i les hipèrboles. S'obtindran paràboles quan $E = 0$ i hipèrboles quan $E > 0$ (en aquest cas $E = 0.5$), com ja s'ha vist en l'apartat 2.5. Els altres paràmetres escollits en aquestes visualitzacions han sigut $m = 0.4$ i $K = 0.5$. Tot i que es tinguin dos tipus de corbes, com es pot apreciar a la Figura 12, les òrbites del tercer cos són molt semblants en ambdós casos. Les Figures 12a i 12b corresponen al cas parabòlic, mentre que les Figures 12c i 12d corresponen al cas hiperbòlic. Com es pot veure a la Figura, les imatges 12a i 12c corresponen a casos en què el tercer cos es manté orbitant al voltant d'un dels primaris, mentre que les imatges 12b i 12d corresponen a casos en què hi ha escapament de l'òrbita. Les visualitzacions s'han efectuat per a velocitats inicials nul·les, encara que canviant la velocitat inicial s'obtenen òrbites semblants a les de la Figura 12.

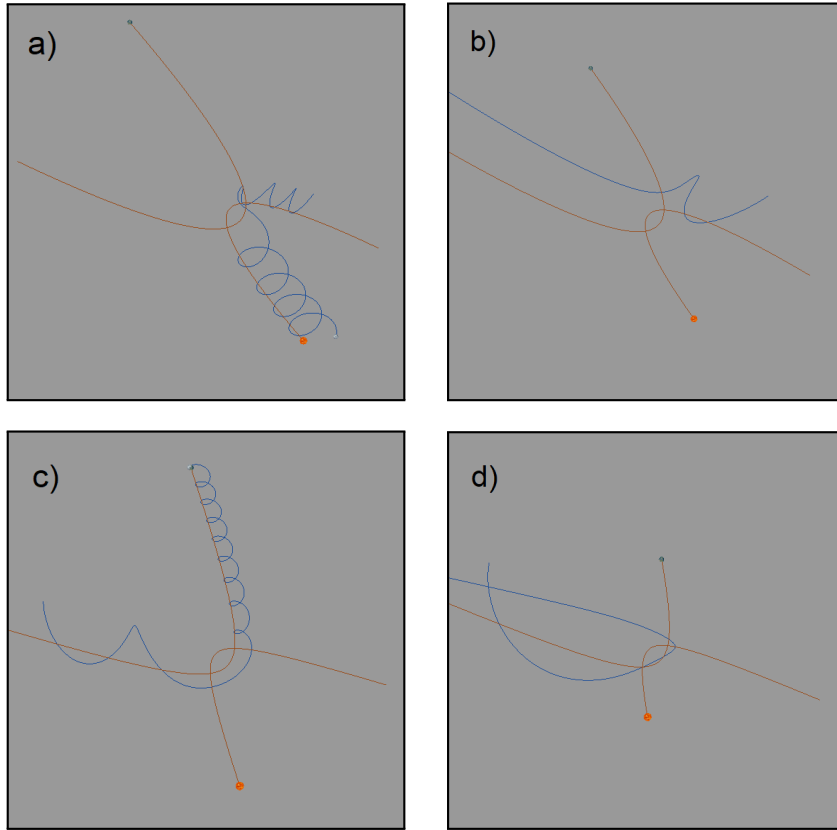


Figura 12: Possibles òrbites observades per a $\alpha = -2$.

- $\alpha = -3$

En aquest cas, els paràmetres escollits per efectuar la visualització han sigut $\mu = 0.4$, $E = 0$ i $l = 0.8$. En la Figura 13a, es pot veure com es produeix una col·lisió amb un dels primaris degut al gran valor de la força per distàncies petites. En aquest cas, la velocitat inicial del tercer cos era nul·la. En canvi, en la Figura 13b es pot observar una òrbita d'escapament. La velocitat inicial en aquest cas té mòdul $V_0 = 1.5$ i direcció horitzontal.

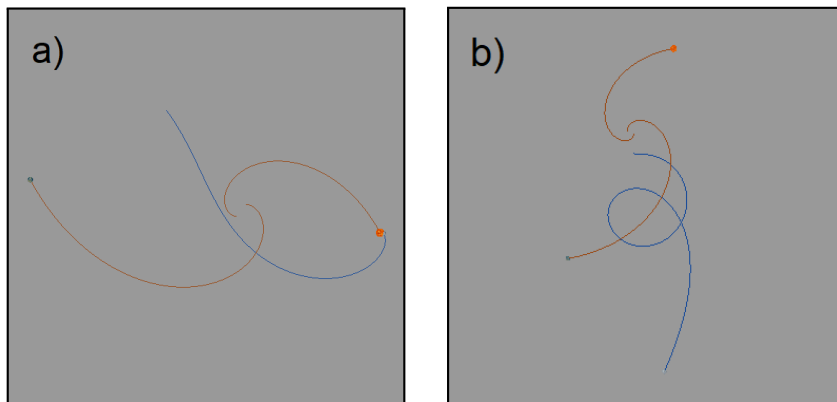


Figura 13: Possibles òrbites observades per a $\alpha = -3$.

5 Simulador

El simulador utilitzat per resoldre el problema estès de tres cossos s'ha construït partint d'un simulador del problema restringit el·líptic i pla de tres cossos que donava per conegudes les posicions dels dos cossos primaris i calculava el moviment del tercer cos utilitzant formulació hamiltoniana en el sistema sinòdic polsant i aplicant la regularització de Levi-Civita. Inicialment, el programa s'ha modificat per resoldre el problema estès de dos cossos ja que, com s'ha vist anteriorment, no és resoluble analíticament per a qualsevol valor de α . Després, s'ha modificat el programa per calcular el moviment del tercer cos a partir de la formulació newtoniana, aplicant la regularització adequada. La visualització s'ha mantingut en el mateix sistema de referència que en l'anterior programa, el sistema sideri.

5.1 Funcionament del simulador

En executar el programa es veu l'àrea de pantalla següent, clarament dividida en tres parts.

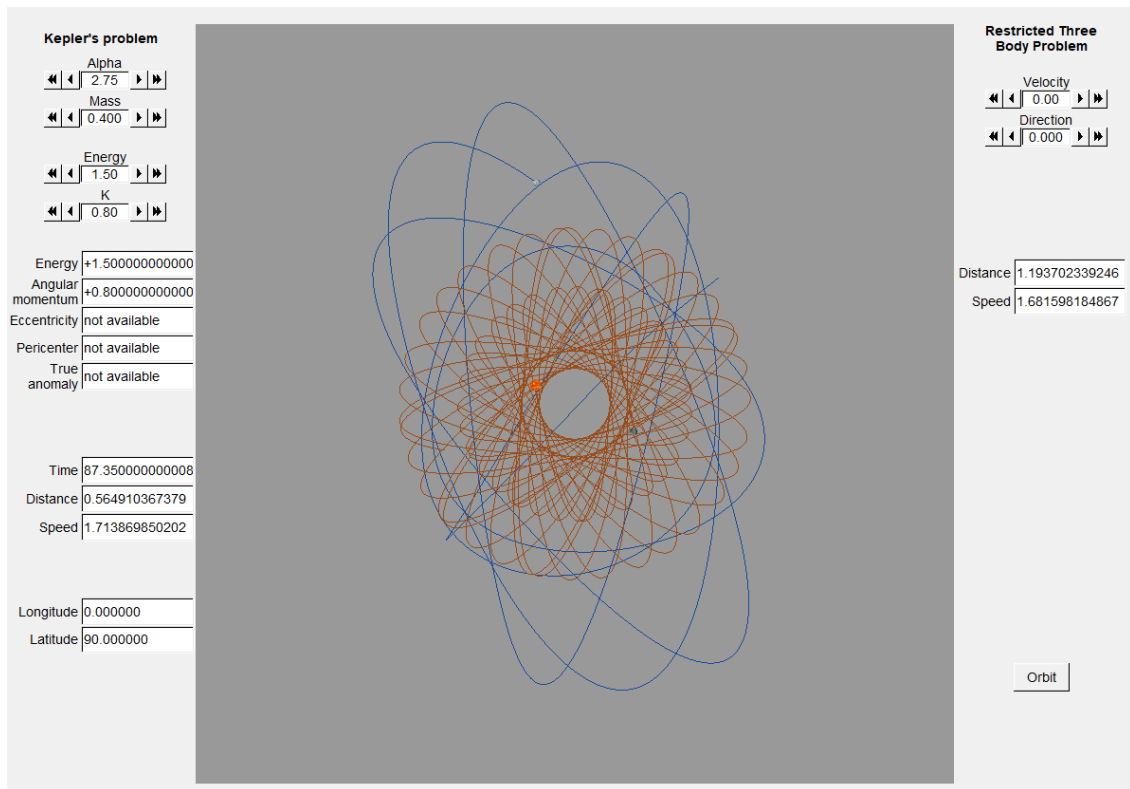


Figura 14: Imatge del simulador que s'ha fet servir per a visualitzar òrbites del problema restringit estès de tres cossos.

La part central és on es dibuixen les òrbites dels tres cossos per a cada cas donat. A la Figura 14 es poden veure els dos cossos primaris, que formen una òrbita de color vermell i el tercer cos, amb una òrbita de color blau. A la part dreta hi ha els paràmetres predeterminats i de control relacionats amb el problema de Kepler

i, a la part esquerra, es poden observar els paràmetres relacionats amb el problema restringit de tres cossos.

A la part superior esquerra, es poden veure quatre botons que ens permeten determinar manualment els paràmetres següents abans d'executar la representació gràfica:

1. El paràmetre α , determina quin tipus de força s'utilitzarà. El paràmetre es pot fer variar entre -10 i 10.
2. Paràmetre de masses μ , que es pot variar entre 0 i 0.5 ja que per $\mu \in (0.5, 1)$ s'obté el mateix resultat però amb els primaris intercanviats.
3. Energia E , dona l'energia del sistema de dos cossos per determinar el seu moviment. Aquest valor es pot fer variar entre -10 i 10.
4. Moment angular l , determina el moment angular dels dos primaris. El seu valor pot variar entre -10 i 10.

A la part superior dreta també es poden observar dos botons semblants que serveixen per determinar els paràmetres següents:

5. El mòdul de la velocitat inicial V_0 del tercer cos. El seu valor es pot fer variar entre 0 i 5.
6. La direcció de la velocitat inicial β_0 del tercer cos. El seu valor pot variar entre 0 i 2π .

Un cop determinats tots els paràmetres, el pas següent és inicialitzar la visualització de les òrbites corresponents. Per començar, s'ha d'inicialitzar el moviment dels dos cossos primaris. Per fer-ho, s'ha de seleccionar manualment la posició del primer cos amb el ratolí, prement el botó dret en la coordenada (x, y) desitjada. Perquè els dos primaris comencin el seu moviment, només cal clicar el botó esquerre del ratolí en qualsevol punt de la pantalla. Un cop els dos primaris comencen el seu moviment ja es pot procedir a la inicialització del moviment del tercer cos. Per fer-ho, es fa servir el mateix procediment que per inicialitzar els primaris. En aquest cas, s'ha de tenir en compte que, un cop es prem el botó dret que determina la posició inicial del tercer cos, el moviment dels dos cossos primaris s'aturarà. Un cop es premi el botó esquerre, el tercer cos iniciarà el seu moviment i els dos primaris el reprendran.

A la part esquerra del simulador s'han situat els paràmetres de control relacionats amb el problema de Kepler, com l'energia i el moment angular, que serveixen per comprovar que, tal com s'ha vist en la secció 2, siguin sempre constants. També s'hi poden veure els valors de l'eccentricitat, pericentre i anomalia vertadera, que només tenen sentit en el cas $\alpha = -2$ i, en els altres casos, apareixen amb un missatge d'error com el de la Figura 14. Els paràmetres de distància i velocitat serveixen per controlar els valors en cada moment de la solució del problema de Kepler.

Finalment, el temps serveix per controlar el temps d'execució de la simulació i la longitud i latitud indiquen el punt de vista de la visualització.

A la banda dreta hi ha dos paràmetres de control, que són la distància i la velocitat, respecte al sistema de referència sideri, del tercer cos. En aquesta banda també hi ha el botó *Orbit*, que serveix per esborrar l'òrbita del tercer cos sense haver de canviar els paràmetres de la simulació ni aturar el moviment dels primaris.

5.2 Programa

El llenguatge de programació utilitzat en aquest treball ha sigut el C++, fent servir el Visual Studio com a entorn de programació. El programa consta de 6 fitxers de codi, cadascun amb les funcions necessàries per efectuar diferents tipus de càlculs. Els diferents fitxers són:

- XRTBP_Vis.cpp

Aquest fitxer conté el main del programa, que s'encarrega de situar els botons amb els paràmetres necessaris, situar les finestres amb els paràmetres de control i la finestra de visualització i crida les funcions necessàries per poder efectuar la visualització de l'òrbita. A més de la funció principal, en aquest fitxer s'hi poden trobar funcions com la que interpreta les ordres donades pel ratolí o el teclat, les que calculen els paràmetres de control i els paràmetres establerts o funcions com les que tenen en compte el zoom o el punt de vista.

- XRTBP_Orbits.cpp

En aquest fitxer s'hi poden trobar les funcions que inicialitzen, calculen i dibuixen les diferents òrbites.

- La primera funció llegeix la posició dels dos cossos primaris i, a partir de l'energia i moment angular donats, calcula la seva velocitat inicial i ho escriu tot en el vector (x, \dot{x}, y, \dot{y}) .
- La funció següent llegeix la posició i velocitat del tercer cos i crea un vector de 8 variables amb les posicions i velocitats relatives del problema de Kepler dels dos primaris per poder efectuar els càlculs amb el mateix pas d'integració. Aquest vector és el següent: $(x, \dot{x}, y, \dot{y}, X, \dot{X}, Y, \dot{Y})$, sent (x, y) i (X, Y) les coordenades del vector \vec{r} i el tercer cos, respectivament.
- Aquesta funció integra numèricament el camp $(\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y})$ a cada pas de temps per calcular el moviment dels cossos primaris i guarda tots els punts de l'òrbita.
- La funció següent integra numèricament el camp $(\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}, \dot{X}, \ddot{X}, \dot{Y}, \ddot{Y})$ a cada pas de temps per calcular el moviment tant dels primaris com del tercer cos i guarda tots els punts de l'òrbita del problema de Kepler estès i del tercer cos.

- En aquesta funció es dibuixa l'òrbita sencera dels primaris després de cada pas d'integració, calculant la seva posició a partir del problema de Kepler.
- Aquesta funció és equivalent a l'anterior, però aquesta dibuixa l'òrbita del tercer cos.

- XRTBP_Fields.cpp

En aquest fitxer s'hi poden trobar les funcions que ens calculen en cada instant les equacions diferencials que es volen resoldre, és a dir, els camps de la solució. Aquests camps tenen a cada component una derivada respecte a la variable independent corresponent, en aquest cas el temps. A més, en aquest fitxer hi ha les funcions que calculen els hamiltonians i els seus camps respectius en diversos sistemes de referència, que s'han fet servir com a comprovació en el cas $\alpha = -2$.

- XRTBP_Display.cpp

En aquest fitxer s'hi troben les funcions necessàries per visualitzar els tres cossos i els seus moviments de translació. A més de donar color i textura als tres cossos, en aquest fitxer també hi ha la funció que dóna color al fons de la pantalla.

- RKF.cpp

Aquest fitxer conté diferents versions del mètode numèric de Runge-Kutta-Fehlberg i les funcions necessàries per guardar i alliberar memòria. Els dos mètodes en aquest apartat són el RKF 4-5 i el RKF 7-8, encara que en aquest cas només s'utilitza el segon mètode, ja que té un major ordre de precisió i permet fer servir passos més grans.

- XRTBP_Coord.cpp

En aquest fitxer s'hi poden trobar les funcions necessàries per canviar entre sistemes de coordenades. En aquest treball no s'ha hagut de canviar entre els sistemes sideri, sinòdic i sinòdic regularitzat, però aquests s'han fet servir per comprovar els resultats amb el cas el·líptic que es tenia al principi.

El funcionament del simulador s'ha comprovat executant la solució per el problema restringit estès de tres cossos per a $\alpha = -2$ i superposant-la a la solució del problema restringit el·líptic que es tenia inicialment. Sigui l'òrbita blava la solució amb el mètode usat per el problema estès i l'òrbita verda la solució per a la formulació hamiltoniana que es tenia prèviament, es pot comprovar a la Figura 15 que segueixen el mateix moviment, encara que la velocitat de càlcul de l'òrbita del programa nou és més lenta que la que es tenia anteriorment.

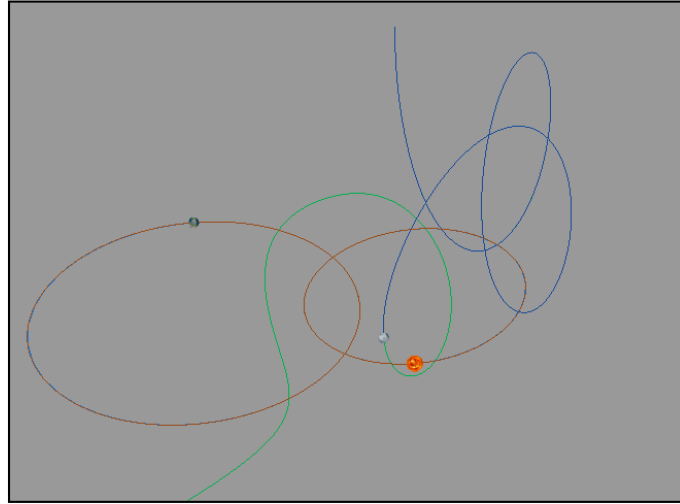


Figura 15: Visualització del problema restringit el·líptic i el problema restringit estès per a $\alpha = -2$ que s'ha fet servir per comprovar el funcionament del programa.

6 Conclusions

Inicialment s'ha fet un estudi sobre el problema de Kepler estès en el qual s'ha comprovat la conservació del moment angular i de l'energia per a qualsevol força central i s'ha estudiat el potencial i les possibles òrbites que es poden obtenir segons aquest. També s'ha vist que, en general, l'equació diferencial de l'òrbita no és resoluble analíticament i, finalment, s'ha resolt el per el cas gravitatori.

Després s'ha fet un breu resum del problema restringit el·líptic, on s'han presentat diverses maneres de calcular l'òrbita a partir del sistema de referència sideri i del sinòdic polsant. També s'ha introduït el problema de la regularització i s'ha presentat la regularització de Levi-Civita com una solució per al problema restringit el·líptic i pla.

En l'apartat següent s'ha introduït el problema restringit estès de tres cossos i la regularització que s'ha fet servir en aquest cas, ja que no es podia aplicar la de Levi-Civita. Seguidament s'ha fet un estudi de diferents tipus d'òrbites que poden aparèixer en el problema estès i s'han presentat diverses visualitzacions efectuades amb el simulador programat. En fer les visualitzacions s'ha pogut fer una comprovació del Teorema de Bertrand (Teorema 2.9), ja que per a diferents valors d' α , els únics amb òrbites tancades són $\alpha = \{-2, 1\}$.

Finalment s'ha presentat la part a què s'ha donat més importància i que ha requerit més dedicació: el simulador. S'ha explicat com inicialitzar les visualitzacions i s'ha fet un breu resum del programa i del seu funcionament. La part més feixuga i gratificant a l'hora d'estendre el simulador, ha estat la comprovació de la coincidència de les òrbites amb l'anterior simulador sobre el problema restringit el·líptic, la qual cosa dona garanties de funcionament correcte al nou simulador.

Una de les parts més complicades a l'hora de construir aquest simulador ha sigut la comprovació amb el cas el·líptic per saber si el nou programa funcionava correctament.

Durant el procés de construcció del simulador, es va observar que, a part d'aplicar la regularització en el tercer cos, era necessari aplicar-la per $\alpha < -2.75$ en el problema de Kepler, ja que per $E < 0$ el radi es feia tant petit que les òrbites sortien disparades, és a dir, es produïa el mateix comportament que si hi hagués hagut col·lisió.

També s'ha de comentar, que en la regularització de l'òrbita del tercer cos per a $\alpha \leq -3$, com la regularització escollida és $\frac{dt}{d\tau} = r^{-\alpha}$, quan el tercer cos s'apropa a un dels primaris, els passos d'integració s'efectuen per temps tan petits que, a la pràctica, sembla que s'aturi el programa. És a dir, apareix una dificultat essencial per a $\alpha < -2$ a l'hora de resoldre aquest problema.

Per això, una de les possibles continuacions d'aquest treball seria fer un estudi més exhaustiu de la regularització per tal de trobar-ne una que serveixi per altres valors d' α i que sigui més eficient que l'escollida en aquest treball.

7 Annex

7.1 Mètode de Runge-Kutta

Definició 7.1. *El mètode de Runge-Kutta és un mètode d'integració numèrica d'equacions diferencials ordinàries del tipus $y' = f(t, y(t))$.*

Sigui

$$\begin{aligned}y' &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

un problema de valors inicials, si es vol conèixer la solució del problema en l'interval $[t_0, t_1]$, s'ha de definir un pas d'integració h , que permetrà calcular $y(t_0 + h)$. Suposant que y_n i t_n són coneguts, el procés iteratiu serà el següent:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s a_i k_i \quad (7.1)$$

on

$$\begin{aligned}k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + b_2 h, y_n + h c_{21} k_1) \\ k_3 &= f(t_n + b_3 h, y_n + h(c_{31} k_1 + c_{32} k_2)) \\ &\vdots \\ k_s &= f(t_n + b_s h, y_n + h \sum_{j=1}^{s-1} c_{sj} k_j)\end{aligned} \quad (7.2)$$

Fixant els coeficients s , a_i ($i = 1, \dots, s$), b_j ($j = 2, \dots, s$) i c_{ij} ($1 \leq j < i \leq s$) es determinarà el mètode de Runge-Kutta usat. La variable s determina l'ordre del mètode usat, que correspon a l'ordre pel qual es trunca el polinomi de Taylor corresponent a la funció que es vol resoldre $f(t, y(t))$, i els altres coeficients s'expressaran en una taula de Butcher com la següent.

0					
b_2	c_{12}				
b_3	c_{13}	c_{23}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
b_s	c_{1s}	c_{2s}	\dots	$c_{s-1,s}$	
	a_1	a_2	\dots	a_{s-1}	a_s

El mètode més usual és el Runge-Kutta d'ordre 4, que té un error local d'ordre $\mathcal{O}(h^4)$, on h és el pas d'integració. La taula de Butcher d'aquest mètode és:

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
<hr/>				
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Ara bé, aquest mètode amb un pas d'integració constant no sempre és l'adequat per resoldre un problema de valors inicials qualsevol, sinó que es necessita un mètode que variï el pas h . Aquests mètodes s'anomenen mètodes de Runge-Kutta adaptatius i en aquest treball s'ha usat el mètode de Runge-Kutta-Fehlberg.

7.1.1 Mètode de Runge-Kutta-Fehlberg

Definició 7.2. *El mètode de Runge-Kutta-Fehlberg és un mètode d'integració numèrica del problema de valors inicials*

$$y' = f(t, y(t)) \quad , \quad t_0 < t < t_1 \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

amb un error local que té una tolerància donada.

Aquest mètode fa servir el Runge-Kutta d'ordre $s + 1$ per estimar l'error local en el Runge-Kutta d'ordre s . Enlloc de calcular els k_i pels dos mètodes, només es calculen els de l'ordre superior i es fan servir els k_j amb $j < i$ que es necessiten per l'avaluació del mètode de Runge-Kutta d'ordre inferior. Així es redueix el nombre d'avaluacions de la funció.

En definitiva, s'efectuen els dos càlculs i, suposant que $\tilde{y}_n = y_n$, s'obtenen les següents solucions:

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^s \tilde{a}_i k_i \\ y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^s a_i k_i\end{aligned}$$

on \tilde{y} correspon a la solució calculada amb el mètode d'ordre $n + 1$ i on l'error local és d'ordre $\mathcal{O}(h^{n+1})$ i $\mathcal{O}(h^n)$ respectivament.

En aquest treball s'ha usat el mètode de Runge-Kutta-Fehlberg d'ordres 7 i 8 (RKF 78), que té la següent taula de Butcher, on la penúltima fila correspon als coeficients a_i del Runge-Kutta d'ordre 7 i l'última fila correspon als del mètode d'ordre 8:

0														
$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{27}$													
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$												
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{8}$											
$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	0	$-\frac{25}{16}$	$\frac{25}{16}$										
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$									
$\frac{5}{6}$	$-\frac{25}{108}$	0	0	$\frac{125}{108}$	$-\frac{65}{27}$	$\frac{125}{54}$								
$\frac{1}{6}$	$\frac{31}{300}$	0	0	0	$\frac{61}{225}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{13}{900}$							
$\frac{2}{3}$	2	0	0	$-\frac{53}{6}$	$\frac{704}{45}$	$-\frac{107}{9}$	$\frac{67}{90}$	3						
$\frac{1}{3}$	$-\frac{91}{1080}$	0	0	$\frac{23}{108}$	$-\frac{976}{135}$	$\frac{311}{54}$	$-\frac{19}{60}$	$\frac{17}{6}$	$-\frac{1}{12}$					
1	$\frac{2383}{4100}$	0	0	$-\frac{341}{164}$	$\frac{4496}{1025}$	$-\frac{301}{82}$	$\frac{2133}{4100}$	$\frac{45}{82}$	$\frac{45}{164}$	$\frac{18}{41}$				
0	$\frac{3}{205}$	0	0	0	0	$-\frac{6}{41}$	$-\frac{3}{205}$	$-\frac{3}{41}$	$\frac{3}{41}$	$\frac{6}{41}$	0			
1	$-\frac{1777}{4100}$	0	0	$-\frac{341}{164}$	$\frac{4496}{1025}$	$-\frac{289}{82}$	$\frac{2193}{4100}$	$\frac{51}{82}$	$\frac{33}{164}$	$\frac{12}{41}$	0	1		
	$\frac{41}{840}$	0	0	0	0	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{41}{840}$	0	0	
	0	0	0	0	0	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{280}$	0	$\frac{41}{840}$	$\frac{41}{840}$	

7.2 Integrals el·líptiques

Definició 7.3. *Sigui K un cos, $\forall A, B \in K$ es defineix una **corba (o funció) el·líptica E** com el conjunt de punts $(x, y) \in K \times K$ que satisfan l'equació*

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

conjuntament amb un punt ideal O que s'anomenarà identitat. La resta de punts s'anomenaran punts finits.

De fet, una funció el·líptica és el conjunt de punts en el pla $z = 0$ que satisfan l'equació $y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, però aquesta equació es pot reduir a l'anterior mitjançant un canvi de variable.

Contràriament al que el nom pot portar a pensar, una funció el·líptica no és una el·lipse. Aquestes funcions estan relacionades amb les integrals el·líptiques, que s'anomenen així perquè apareixen quan es vol trobar la longitud d'arc d'una el·lipse. Així com l'estudi de la longitud d'arc d'una circumferència dóna lloc a les funcions trigonomètriques, el càlcul de la longitud d'arc de l'el·lipse ens porta a les integrals el·líptiques i a les seves funcions el·líptiques.

Definició 7.4. *Una **integral el·líptica** és tal que el seu integrant depèn racionalment de l'arrel quadrada d'un polinomi de tercer o quart grau. Sigui R una funció*

racional i $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$, aleshores es defineix una integral el·líptica $f(x)$ com

$$f(x) = \int R\left(x, \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}\right) .$$

Les funcions el·líptiques tenen un lloc destacat en la teoria de funcions de variable complexa i apareixen en moltes aplicacions físiques com en el moviment d'un pèndol simple o en el problema de Kepler estès, com s'ha vist en aquest treball.

Referències

- [1] Burden, R.L.; Faires, J.D.: Numerical Analysis, eight edition, *Thomson Brooks Cole*, United States of America, 2005.
- [2] Celletti, A.: Stability and chaos in celestial mechanics, *PraxisPublishing Ltd*, Chichester, UK, 2010.
- [3] Courant, R.; John, F.: Introducción al cálculo y al análisis matemático, *Editorial Limusa-Wiley, S.A.*, México, 1971.
- [4] Goldstein, H.: Mecánica Clásica, *Ediciones Aguilar, S.A.*, Madrid, 1970.
- [5] Llibre, J.; Piñol, C.: On the elliptic restricted three body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **48**: 319-345, 1990.
- [6] Redó Riveiro, S.: Estudi i simulació del problema restringit de 3 cossos el·líptic, 2016.
- [7] <https://www.latex-project.org/>
- [8] <https://www.ftk.org>